

别慌，小场面

1. 在矩形 $OABC$ 中， $OA = 4$ ， $OC = 2$ ，以点 O 为坐标原点， OA 所在的直线为 x 轴，建立直角坐标系．

(1) 将矩形 $OABC$ 绕点 C 逆时针旋转至矩形 $DEFC$ ，如图1， DE 经过点 B ，求旋转角的大小和点 D ， F 的坐标．

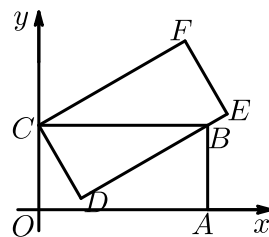


图 1

(2) 将图1中矩形 $DEFC$ 沿直线 BC 向左平移，如图2，平移速度是每秒1个单位长度．

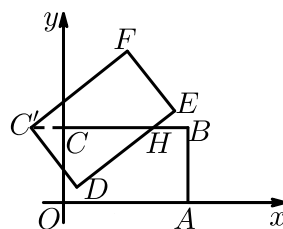


图 2

① 经过几秒，直线 EF 经过点 B ．

② 设两矩形重叠部分的面积为 S ，运动时间为 t ($0 < t < 4$)，写出重叠部分面积 S 与时间 t 之间的函数关系式．

【答案】 (1) 旋转角为 30° ； $D(1, 2 - \sqrt{3})$ ， $F(2\sqrt{3}, 4)$ ．

(2) ① $\frac{8\sqrt{3} - 12}{3}$ 秒．

$$\textcircled{2} \quad S = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + 2\sqrt{3} & (0 < t < 1) \\ \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}t + \frac{8}{3}\sqrt{3} & (1 \leq t < 4) \end{cases}.$$

【解析】 (1) 如图1，过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M ，过点 F 作 $FN \perp BC$ 于 N ，

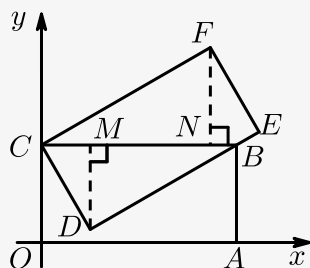


图 1

$\because CD = OC = 2$ ， $OA = BC = 4$ ， $\angle CDE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \cos \angle BCD = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BCD = 60^\circ, \\
&\therefore \angle FCB = 90^\circ - \angle BCD = 30^\circ, \\
&\therefore \text{旋转角为 } 30^\circ, \\
&\therefore \cos \angle BCD = \frac{CM}{CD}, \\
&\therefore CM = CD \cdot \cos \angle BCD = 2 \times \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \\
&\therefore DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{3}, \\
&\therefore D(1, 2 - \sqrt{3}), \\
&\therefore \cos \angle FCB = \frac{CN}{CF}, \\
&\therefore CN = CF \cdot \cos \angle FCB = BC \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \\
&\therefore FN = \sqrt{CF^2 - CN^2} = 2, \\
&\therefore F(2\sqrt{3}, 4).
\end{aligned}$$

(2) ① 如图2, HB 即为直线 EF 经过点 B 时移动的距离,

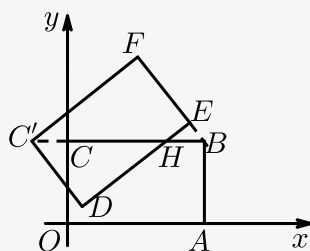


图 2

$$\begin{aligned}
&\text{在Rt}\triangle C'DH\text{中}, \\
&DH = C'D \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}, \\
&\therefore HE = DE - DH = OA - DH = 4 - 2\sqrt{3}, \\
&\text{在Rt}\triangle BEH\text{中}, \\
&HE = BH \cos 30^\circ, \\
&\therefore BH = \frac{HE}{\cos 30^\circ} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3} - 12}{3}, \\
&\therefore \text{直线}EF\text{经过点}B\text{时所需的时间为}\frac{8\sqrt{3} - 12}{3}\text{秒}.
\end{aligned}$$

② 过点 D 作 $DM \perp BC$ 于 M ,

$$\begin{aligned}
&\text{在Rt}\triangle DMC'\text{中}, \\
&C'M = C'D \cos 60^\circ = 1, \\
&DM = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

如图3, 当 $0 < t < 1$ 时, 重叠部分面积为四边形 DC_1CH ,

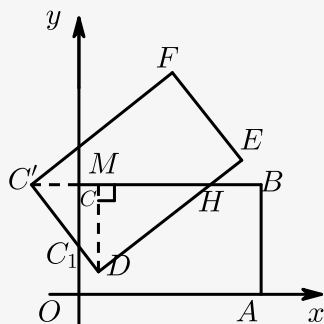


图 3

$$CC' = t, CC_1 = CC' \tan 60^\circ = \sqrt{3}t,$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= S_{\triangle C'DH} - S_{\triangle C'CC_1} \\ &= \frac{1}{2} C'D \cdot DH - \frac{1}{2} CC' \cdot CC_1 \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} t \times \sqrt{3}t \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

如图4, 当 $1 \leq t < 4$ 时, 重叠部分的面积为 $\triangle C_1CH$, $CC' = t$,

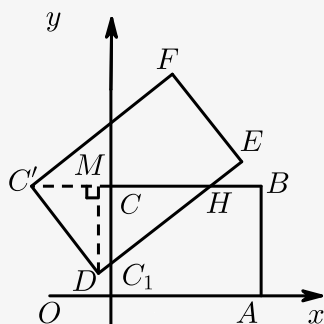


图 4

在 $\text{Rt}\triangle C'HD$ 中,

$$C'D = C'H \cos 60^\circ,$$

$$\therefore C'H = \frac{C'D}{\cos 60^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,$$

$$\therefore CH = C'H - C'C = 4 - t,$$

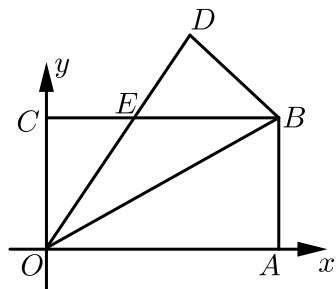
$$\therefore CC_1 = CH \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(4 - t),$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} CC_1 \cdot CH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}(4 - t)(4 - t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} t^2 - \frac{4}{3} \sqrt{3} t + \frac{8}{3} \sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\therefore \text{综上所述: } S = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 2\sqrt{3} (0 < t < 1) \\ \frac{\sqrt{3}}{6} t^2 - \frac{4}{3} \sqrt{3} t + \frac{8}{3} \sqrt{3} (1 \leq t < 4) \end{cases}.$$

【标注】【知识点】坐标系中的平移

如图，在平面直角坐标系中，长方形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 x 轴， y 轴的正半轴上，点 B 的坐标为 $(8, 4)$ 。将该长方形沿 OB 翻折，点 A 的对应点为点 D ， OD 与 BC 交于点 E 。



- (1) 证明： $EO = EB$ 。
- (2) 点 P 是直线 OB 上的任意一点，且 $\triangle OPC$ 是等腰三角形，求满足条件的点 P 的坐标。
- (3) 点 M 是 OB 上任意一点，点 N 是 OA 上任意一点，若存在这样的点 M, N ，使得 $AM + MN$ 最小，请直接写出这个最小值 _____。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $(4, 2)$ 或 $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 。

(3) $\frac{32}{5}$

【解析】 (1) $\because$ 将该长方形沿 OB 翻折，点 A 的对应点为点 D ， OD 与 BC 交于点 E ，

$$\therefore \angle DOB = \angle AOB,$$

$$\because BC \parallel OA,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle AOB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle DOB,$$

$$\therefore EO = EB.$$

(2) 由 (1) 知： $EO = EB$ ，

$\because$ 长方形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 x 轴， y 轴的正半轴上，点 B 的坐标为 $(8, 4)$ ，

设 $OE = x$ ，则 $DE = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中， $BD = 4$ ，根据勾股定理得： $DB^2 + DE^2 = BE^2$ ，

$$\therefore 16 + (8 - x)^2 = x^2,$$

$$\therefore x = 5,$$

$$\therefore BE = 5,$$

$$\therefore CE = 3,$$

$$\therefore E(3, 4),$$

$\because$ 点 B 的坐标为 $(8, 4)$ ，

$\therefore$ 直线 OB 的解析式为： $y = \frac{1}{2}x$ ，

∵点P是直线OB上的任意一点，

∴设 $P(a, \frac{1}{2}a)$ ，

∴ $O(0,0)$ ， $C(0,4)$ ，

∴ $OC=4$ ， $PO^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$ ，

$PC^2 = a^2 + \left(4 - \frac{1}{2}a\right)^2$

∴ $\triangle OPC$ 是等腰三角形，

①当 $PO=PC$ 时， $PO^2=PC^2$ ，

∴ $\frac{5}{4}a^2 = a^2 + \left(4 - \frac{1}{2}a\right)^2$ ，

∴ $a=4$ ，

∴ $P(4,2)$ 。

②当 $PO=OC$ 时， $PO^2=OC^2$ ，

∴ $\frac{5}{4}a^2 = 16$ ，

∴ $a = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ，

∴ $P\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $P\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ （舍）。

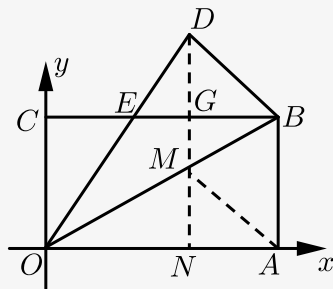
③当 $PC=OC$ 时， $PC^2=OC^2$ ，

∴ $a^2 + \left(4 - \frac{1}{2}a\right)^2 = 16$ ，

解得 $a=0$ （舍），或 $a=\frac{16}{5}$ ，即 $P\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$ ；

故满足条件的点P的坐标为 $(4,2)$ 或 $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 。

(3) 过点D作OA的垂线交OB于M，交OA于N，此时M，



N是 $AM+MN$ 的最小值，求出DN就是 $AM+MN$ 的最小值。

由(2)有 $DE=3$ ， $BE=5$ ， $BD=4$ ，

∴根据面积有 $DE \times BD = BE \times DG$ ，

∴ $DG = \frac{DE \times BD}{BE} = \frac{12}{5}$ ，

由题意得： $GN=OC=4$ ，

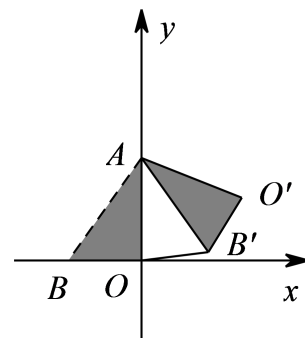
∴ $DN = DG + GN = \frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$ ，

即 $AM+MN$ 的最小值为： $\frac{32}{5}$ 。

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

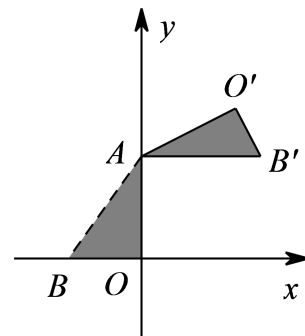
3. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(0,4)$ ，点 $B(-2,0)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 A 逆时针旋转，得 $\triangle AB'O'$ ，点 B 、 O 旋转后的对应点为 B' 、 O' 。

(1) 如图①，若旋转角为 60° 时，求 BB' 的长。



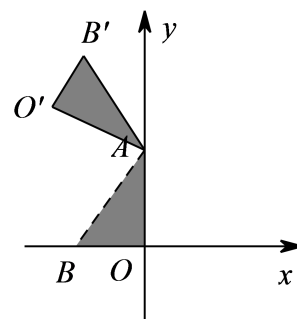
图①

(2) 如图②，若 $AB' \parallel x$ 轴，求点 O' 的坐标。



图②

(3) 如图③，若旋转角为 240° 时，边 OB 上的一点 P 旋转后的对应点为 P' ，当 $O'P + AP'$ 取得最小时，求点 P' 的坐标(直接写出结果即可)。



图③

【答案】(1) $BB' = AB = 2\sqrt{5}$.

(2) $\left(\frac{8}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5} + 4\right)$.

(3) $\left(-\frac{8}{5}\sqrt{3}, \frac{36}{5}\right)$.

【解析】(1) 由点 $A(0, 4)$, 点 $B(-2, 0)$

可知 $AO = 4$, $BO = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中,

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

由旋转可知, $\angle BAB' = 60^\circ$,

$$AB = AB',$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形,

$$\therefore BB' = AB = 2\sqrt{5}.$$

(2) 过点 O' 作 $O'D \perp x$ 轴,

垂足为 D ,

交 AB' 于点 E ,

又 $AB' \parallel x$ 轴,

$$\therefore \angle O'EA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle O'EA = \angle AOB,$$

由旋转可得

$$\angle B'AO' = \angle BAO,$$

$$AO' = AO = 4,$$

$$\therefore \triangle AO'E \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{O'E}{BO} = \frac{AO'}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{AE}{4} = \frac{O'E}{2} = \frac{4}{2\sqrt{5}},$$

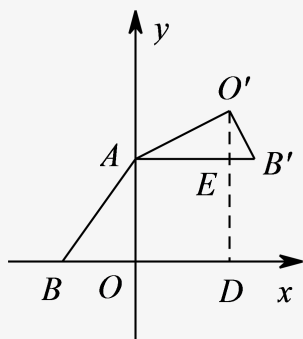
$$\therefore AE = \frac{8}{5}\sqrt{5},$$

$$O'E = \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore O'D = \frac{4}{5}\sqrt{5} + 4,$$

$$\therefore \text{点 } O' \text{ 的坐标为 } \left(\frac{8}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5} + 4\right).$$

(3) 点 P' 的坐标为 $\left(-\frac{8}{5}\sqrt{3}, \frac{36}{5}\right)$.



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

4. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$, 把 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转, 得 $\triangle AB'O'$, 点 B , O 旋转后的对应点为 B' , O' . 记旋转角为 α .

(1) 如图①, 若 $\alpha = 90^\circ$, 求 BB' 的长.

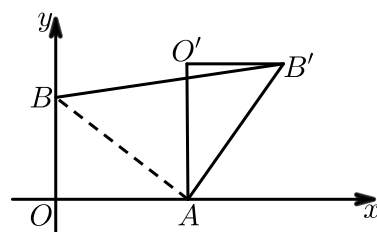


图 ①

(2) 如图②, 若 $\alpha = 120^\circ$, 求点 O' 的坐标.

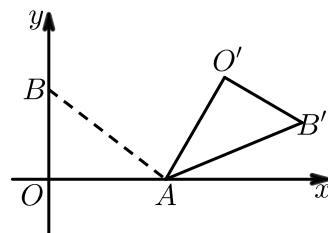


图 ②

(3) 记 K 为 AB 的中点, S 为 $\triangle KO'B'$ 的面积, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $BB' = 5\sqrt{2}$.

(2) $(6, 2\sqrt{3})$.

(3) $\frac{9}{4} \leq S \leq \frac{39}{4}$.

【解析】 (1) 如图①,

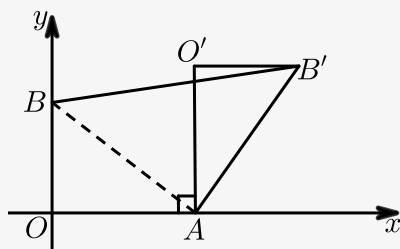


图 ①

$\because$ 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$,

$\therefore OA = 4$, $OB = 3$,

在 $Rt\triangle ABO$ 中, 由勾股定理得 $AB = 5$,

根据题意 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转, 得 $\triangle AB'O'$,

由旋转的性质可得: $\angle BAB' = 90^\circ$, $A'B = AB = 5$,

$\therefore BB' = 5\sqrt{2}$.

(2) 如图②, 过 O' 作 $O'D \perp x$ 轴于 D , 则 $\angle O'DA = 90^\circ$,

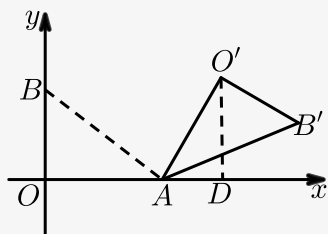


图 ②

由旋转的性质可得： $\angle O'AO = 120^\circ$ ， $O'A = OA = 4$ ，

在 $Rt\triangle O'AD$ 中， $\angle O'AD = 60^\circ$ ， $\angle AO'D = 30^\circ$ ，

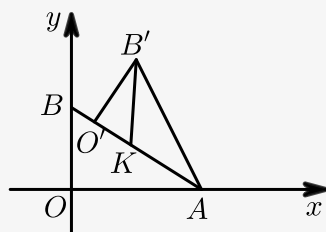
$$\therefore AD = \frac{1}{2}O'A = 2，$$

由勾股定理 $O'D = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore OD = OA + AD = 4 + 2 = 6，$$

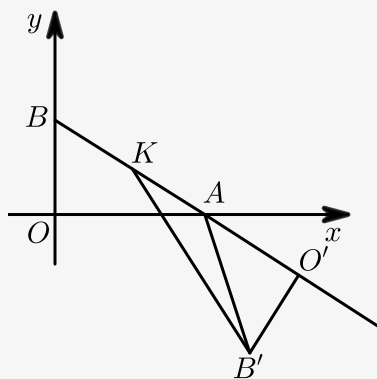
$\therefore$ 点 O' 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$ 。

(3) 如图所示，当点 O' 在 AB 上时，



$\triangle KB'O'$ 的面积最小，最小面积 $S = \frac{1}{2} \times KO' \times O'B' = \frac{1}{2} \times 3 \times (4 - 2.5) = \frac{9}{4}$ ，

当点 O' 在 BA 的延长线上时，



$\triangle KB'O'$ 的面积最大，最大面积 $S = \frac{1}{2} \times KO' \times BO' = \frac{1}{2} \times (4 + 2.5) \times 3 = \frac{39}{4}$ ，

综上所述， $\frac{9}{4} \leq S \leq \frac{39}{4}$ 。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用